

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ

УДК 517.9:534.1

О топологии резонансных зон в асимметричном уравнении Дюффинга–Ван-дер-Поля

©2012 г. *О.С. Костромина*

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского

kostro-olga@yandex.ru

Рассматривается задача о периодических по времени возмущениях уравнения Дюффинга–Ван-дер-Поля с седлом и двумя петлями сепаратрисы в виде восьмёрки. Проводится аналитическое исследование поведения решений в областях вне «восьмёрки», основанное на анализе усреднённых систем и связанное, прежде всего, с анализом резонансных зон. Приводятся результаты численного исследования.

Ключевые слова: усреднение, резонансы

1. Введение

Рассмотрим уравнение Дюффинга–Ван-дер-Поля

$$\ddot{x} - x + x^3 = \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)\dot{x} + p_3 \sin p_4 t], \quad (1)$$

где p_1, p_2, p_3, p_4 – параметры, ε – малый положительный параметр.

К уравнению (1) приводят многочисленные прикладные задачи (см., например, [1], [2], где отсутствуют члены $(p_2x - x^2)\dot{x}$).

Фазовый портрет невозмущённого уравнения ($\varepsilon = 0$) показан на рис. 1. На фазовой плоскости имеются три ячейки, заполненные фазовыми кривыми $\dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h$. $h = 0$ соответствует фазовым кривым в виде двух симметричных петель сепаратрисы седла $O(0,0)$, разделяющим эти ячейки («восьмёрка», см. рис. 1). Выделим три области $G_1^\pm = \{(x, \dot{x}) : \dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h, h \in (-0.25, 0)\}$ и $G_2 = \{(x, \dot{x}) : \dot{x}^2/2 - x^2/2 + x^4/4 = h, h > 0\}$, где знак «плюс» отвечает ячейке с $x > 0$, а «минус» – $x < 0$.

Наличие члена $p_2x\dot{x}$ в (1) приводит к асимметрии фазовых портретов автономного уравнения ($p_3 = 0$). В [3] установлено разбиение плоскости параметров (p_1, p_2) на 22 области с разными топологическими структурами (в симметричном случае – четыре области).

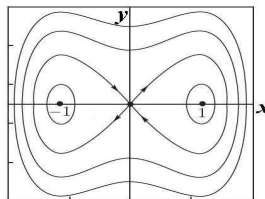


Рис. 1. Фазовый портрет невозмущённого уравнения на плоскости $(x, y = \dot{x})$

Одной из основных проблем в исследовании неавтономных уравнений вида (1) является установление топологии резонансных зон. Для решения этой проблемы нужно

решить вопрос о предельных циклах в соответствующем автономном возмущённом уравнении, чему и была посвящена работа [3].

2. Усреднение уравнения (1) в окрестности резонансных уровней

В областях, заполненных замкнутыми фазовыми кривыми невозмущённого уравнения ($\varepsilon = 0$) и отделённых от невозмущённых сепаратрис, запишем уравнение (1) в переменных «действие I – угол θ »:

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)y + p_3 \sin \varphi]x'_\theta \equiv \varepsilon F_1(I, \theta, \varphi), \\ \dot{\theta} &= \omega(I) + \varepsilon[(p_1 + p_2x - x^2)y + p_3 \sin \varphi]x'_I \equiv \omega(I) + \varepsilon F_2(I, \theta, \varphi), \\ \dot{\varphi} &= p_4, \end{aligned} \quad (2)$$

где ω – частота собственных колебаний.

Говорят, что в системе (2) имеет место резонанс, если

$$\omega(I_{pq}) = (q/p)p_4, \quad (3)$$

где p, q – взаимно простые целые числа.

Уровень $I = I_{pq}$ будем называть резонансным уровнем, а окрестность $U_{\sqrt{\varepsilon}} = \{(I, \theta) : I_{pq} - C\sqrt{\varepsilon} < I < I_{pq} + C\sqrt{\varepsilon}, 0 \leq \theta < 2\pi, C = \text{const} > 0\}$ – резонансной зоной.

Делая в системе (2) замену

$$\theta = \psi + (q/p)\varphi, I = I_{pq} + \mu\eta, \mu = \sqrt{\varepsilon}, \quad (4)$$

усредняя полученную систему по быстрой переменной φ и пренебрегая членами $O(\mu^3)$, придём к системе [4]

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \mu A_0(v, I_{pq}) + \mu^2 P_0(v, I_{pq})u, \\ \dot{v} &= \mu b u + \mu^2 (b_1 u^2 + Q_0(v, I_{pq})), \end{aligned} \quad (5)$$

где $u = \eta + O(\mu)$, $v = \psi + O(\mu^2)$, $b = d\omega(I_{pq})/dI$, $b_1 = d^2\omega(I_{pq})/2dI^2$,

$$A_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_1(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi, \quad (6)$$

$$P_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} [\partial F_1(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) / \partial I] d\varphi, \quad (7)$$

$$Q_0(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} F_2(I_{pq}, v + q\varphi/p, \varphi) d\varphi. \quad (8)$$

Система (5) (её называют усреднённой системой) с помощью замены $u \rightarrow u - \mu Q_0(v, I_{pq})/b$ и перехода к «медленному времени» $\tau = \mu t$ приводится к уравнению маятникового типа [4]

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} - bA_0(v, I_{pq}) = \mu\sigma(v, I_{pq}) \frac{dv}{d\tau}, \quad (9)$$

где

$$\sigma(v, I_{pq}) = \frac{1}{2\pi p} \int_0^{2\pi p} (p_1 + p_2 x - x^2) \Big|_{\substack{x=x(I_{pq}, v+q\phi/p) \\ y=y(I_{pq}, v+q\phi/p)}} d\phi. \quad (10)$$

Уравнение (9) с точностью до членов порядка μ^2 определяет топологию резонансных зон. Функцию $A_0(v, I_{pq})$ представим в виде $A_{0j}(v, I_{pq}) = \tilde{A}_{0j}(v, I_{pq}) + B_j(I_{pq})$ и обозначим $b = b_j$, $\sigma = \sigma_j$, $j = 1, 2$, где B_j – порождающие функции Пуанкаре–Понтрягина для автономного уравнения в соответствующих областях [3].

Следуя [4], расщепляемыми резонансными уровнями будем называть уровни $I = I_{pq}$, для которых уравнение $A_{0j}(v, I_{pq}) = 0$ имеет простые вещественные корни. При этом уровень $I = I_{pq}$ будем называть: 1) частично проходимым, если $\max_v |\tilde{A}_{0j}(v, I_{pq})| > |B_j(I_{pq})| > 0$ и 2) непроходимым, если $B_j(I_{pq}) = 0$. В случае, если $\max_v |\tilde{A}_{0j}(v, I_{pq})| < |B_j(I_{pq})|$, уровень $I = I_{pq}$ будем называть проходимым.

3. Анализ резонансных зон

3.1. Анализ резонансных зон в областях G_1^\pm

Используя невозмущённые решения на резонансном уровне и формулы (6), (10), найдём при $q = 1$

$$\frac{d^2v}{d\tau^2} - b_1(p_3 A_1 \cos pv + B_1) = \mu\sigma_1 \frac{dv}{d\tau}, \quad (11)$$

где

$$b_1 = \frac{\pi (2-\rho)^{3/2} [2(1-\rho)\mathbf{K}(\rho) - (2-\rho)\mathbf{E}(\rho)]}{2 \rho^2 (1-\rho)\mathbf{K}^2(\rho)}, \quad (12)$$

$$\sigma_1 = p_1 - \frac{2}{(2-\rho)\mathbf{K}(\rho)} \mathbf{E}(\rho), \quad (13)$$

$$A_1 = -\sqrt{2} p_4 \frac{a^p}{1+a^{2p}}, \quad a = \exp\left(-\pi \frac{\mathbf{K}(\sqrt{1-\rho})}{\mathbf{K}(\rho)}\right), \quad (14)$$

\mathbf{K} , \mathbf{E} – полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно,

$\rho = k^2$, $k = k(I_{pq})$ – модуль эллиптических интегралов.

При $q > 1$ получаем уравнение

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} - b_1 B_1 = \mu\sigma_1 \frac{d\nu}{d\tau}. \quad (15)$$

Итак, при $q=1$ топология резонансных зон описывается уравнением (11). При $B_1(I_{pq})=0$, когда резонансный уровень $I=I_{pq}$ совпадает с уровнем $I=I_0$, в окрестности которого у автономного уравнения существует предельный цикл, имеем непроходимый резонанс. При $|B_1(I_{pq})| < |p_3 A_1(I_{pq})|$, $B_1(I_{pq}) \neq 0$ резонанс частично проходимый, а при $|B_1(I_{pq})| > |p_3 A_1(I_{pq})|$ – проходимый. При $q > 1$ и $B_1(I_{pq}) \neq 0$, согласно (15), имеем проходимый резонанс.

3.2. Анализ резонансных зон в области G_2

Аналогично предыдущему находим уравнение

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} - b_2(p_3 A_2 \cos p\nu + B_2) = \mu\sigma_2 \frac{d\nu}{d\tau}, \quad (16)$$

которое определяет топологию резонансных зон при p – нечётном и $q=1$. В противном случае топология резонансных зон определяется уравнением

$$\frac{d^2\nu}{d\tau^2} - b_2 B_2 = \mu\sigma_2 \frac{d\nu}{d\tau}. \quad (17)$$

В (16), (17) обозначено

$$b_2 = \frac{\pi (2\rho-1)^{3/2} [(1-\rho)\mathbf{K}(\rho) + (2\rho-1)\mathbf{E}(\rho)]}{4 \rho(1-\rho)\mathbf{K}^2(\rho)}, \quad (18)$$

$$\sigma_2 = p_1 - \frac{2}{(2\rho-1)\mathbf{K}(\rho)} (\mathbf{E}(\rho) + (\rho-1)\mathbf{K}(\rho)), \quad (19)$$

$$A_2 = -2\sqrt{2} p_4 \frac{a^{p/2}}{1+a^p}. \quad (20)$$

При p – чётном и/или $q > 1$ резонанс является проходимым, если $B_2(I_{pq}) \neq 0$.

С помощью программы WInSet [5] было построено отображение Пуанкаре для уравнения (1) при различных значениях параметров. Установлено хорошее согласование численных результатов с проведённым теоретическим исследованием при небольших значениях ε .

Рис. 2 иллюстрирует расщепление резонансных уровней $I=I_{11}$ (рис. 2а, 2б – в области G_1^+ , рис. 2е, 2ф – в области G_2), $I=I_{21}$ (рис. 2с, 2д – в области G_1^+) и $I=I_{31}$ (рис. 2г, 2и – в области G_2). На рис. 2а, 2с, 2е, и 2г показана структура резонансной зоны частично проходимых резонансов (помимо сепаратрис седловой точки отображения Пуанкаре

изображены замкнутые инвариантные кривые, которым отвечают предельные циклы возмущённого автономного уравнения), а на остальных – структура непреходимых резонансов.

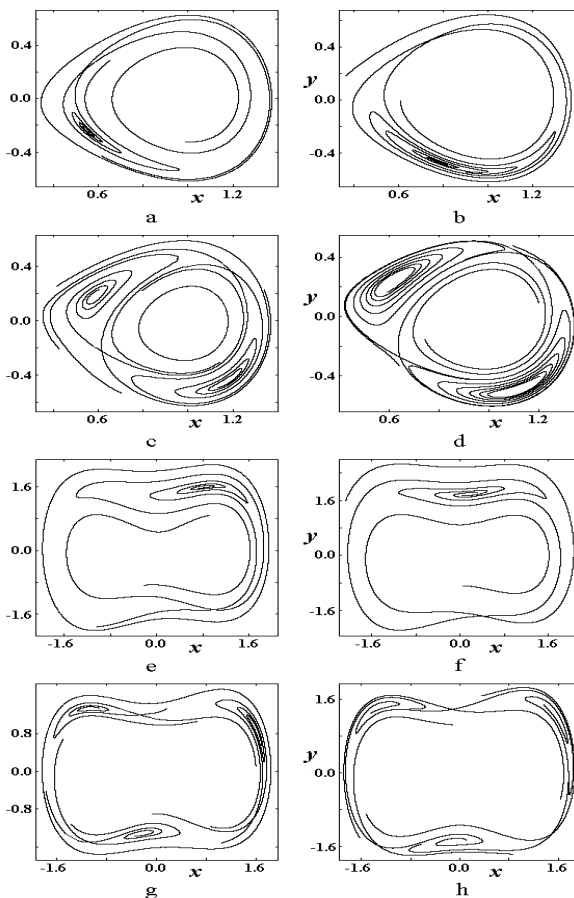


Рис. 2. Поведение инвариантных кривых отображения Пуанкаре для уравнения (1) при $\varepsilon = 0.1$ и $p_1 = 1, p_2 = -0.14, p_3 = 0.03, p_4 = 1.2$ (a); $p_1 = 1, p_2 = -0.1, p_3 = 0.03, p_4 = 1.2$ (b); $p_1 = 1, p_2 = -0.02, p_3 = 0.5, p_4 = 2.5$ (c); $p_1 = 1, p_2 = -0.1, p_3 = 0.5, p_4 = 2.5$ (d); $p_1 = 1.12, p_2 = 0.005, p_3 = 0.5, p_4 = 1.1$ (e); $p_1 = 1.12, p_2 = 0.005, p_3 = 0.5, p_4 = 1.25$ (f); $p_1 = 1, p_2 = 0.03, p_3 = 1, p_4 = 3.1$ (g); $p_1 = 1, p_2 = 0.03, p_3 = 1, p_4 = 3.36$ (h)

Пользуясь случаем, автор выражает благодарность А.Д. Морозову за руководство работой.

Список литературы

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. 560 с.
2. Ravichandran V., Chinnathambiah V., Rajasekar S. Homoclinic bifurcation and chaos in Duffing oscillator driven by an amplitude-modulated force // Physica, ser. A. 2007. V. 376. P. 223–236.
3. Костромина О.С., Морозов А.Д. О предельных циклах в асимметричном уравнении Дюффинга–Ван-дер-Поля // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. 2012. №1 (1). С. 115–121.
4. Морозов А.Д. Резонансы, циклы и хаос в квазиконсервативных системах. Москва–Ижевск: РХД, 2005. 420 с.
5. Морозов А.Д., Драгунов Т.Н. Визуализация и анализ инвариантных множеств динамических систем. Москва–Ижевск: Изд-во Инст. компьют. иссл., 2003.